DIKTAT KULIAH

PERSAMAAN DIFERENSIAL

Dr. Dame Ifa Sihombing, M.Si

email : damesihombing@uhn.ac.id

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS HKBP NOMMENSEN

2020

KATA PENGANTAR

Diktat ini disusun dengan tujuan memberikan informasi tentang persamaan yang memuat variabel tidak bebas beserta derivatif-derivatifnya. Pembahasan utama dalam mata kuliah ini adalah tentang bagaimana menentukan solusi atau mencari penyelesaian dari suatu persamaan differensial mulai dari persamaan diferensial order satu, dan persamaan diferensial order tinggi. Setiap Materi disajikan dalam bentuk defenisi, contoh, dan Latihan dengan tujuan untuk memudahkan mahasiswa memahami materi perkuliahan.

Manfaat mata kuliah ini adalah untuk membantu menyelesaikan permasalahan-permasalahan dalam bentuk persamaan differensial. Selain itu mata kuliah ini juga bisa digunakan sebagai referensi untuk mengambil studi lanjut, baik dalam disiplin ilmu matematika maupun disiplin ilmu lain. Semoga diktat yang sederhana ini dapat membantu mahasiswa mempelajari dan memahami konsep Persamaan Diferensial.

Diktat ini masih sangat jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran masih sangat dibutuhkan demi kelanjutan dan sempurna nya diktat ini. Terima Kasih.

DAFTAR ISI

BAB I

PERSAMAAN DIFERENSIAL DAN SOLUSINYA

A. Pendahuluan

Persamaan diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat derivatif (turunan) satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas suatu fungsi.

Contoh:

Berikut merupakan contoh persamaan diferensial.

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$
2. $\dfrac{d^4x}{dt^4} + 5\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t$
3. $\dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{\partial v}{\partial t} = v$
4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Selanjutnya, persamaan diferensial dapat pula dinotasikan sebagai $y' = \dfrac{dy}{dx}$ atau $x' = \dfrac{dx}{dt}$.

B. Persamaan Diferensial dan Klasifikasinya

1. Persamaan Diferensial Biasa dan Ordernya

Persamaan diferensial biasa merupakan sebuah bentuk persamaan yang memuat turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas suatu fungsi.

Penentuan order suatu persamaan diferensial tergantung pada kandungan fungsi turunan di dalam persamaan diferensial tersebut. Order atau tingkat suatu persamaan diferensial merupakan pangkat tertinggi turunan dalam persamaan diferensial.

Contoh:

1) $y' = \sin x + \cos x$ atau $y' - \sin x - \cos x = 0$: persamaan diferensial biasa order pertama.

2) $y''+7y=0$: persamaan diferensial biasa order kedua.

3) $y''+3y'-4y=0$: persamaan diferensial biasa order kedua.

4) $y'''-e^x y''-yy'=(x^2+1)y^2$: persamaan diferensial biasa order ketiga.

2. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial merupakan sebuah bentuk persamaan yang memuat turunan parsial satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas suatu fungsi.

Contoh:

1) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$

2) $\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+2v=0$

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}=k$

4) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=e$, *e* : bilangan alam/natural (konstanta)

3. Persamaan Diferensial Biasa Linear dan non Linear

Persamaan diferensial biasa linear order *n* dapat dituliskan sebagai

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x)y=b(x)$$

Dimana $a_0 \neq 0$.

Persamaan diferensial biasa non linear jika persamaan diferensial tersebut tak linear.

Contoh:

1. $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ (PD linear order dua)
2. $\frac{d^4 y}{dx^4} + x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^3 \frac{dy}{dx} = xe^x$ (PD linear order empat)
3. $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 4y^3 = 0$ (PD non linear)
4. $\left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right)^2 + x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^3 \frac{dy}{dx} = xe^x$ (PD non linear).

Perhatikan bentuk berikut:

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy$$

merupakan bentuk sistem persamaan diferensial Lotka-Volterra atau predator-prey (sistem mangsa pemangsa dalam ekologi). Materi tersebut untuk pembahasan persamaan diferensial yang tingkat lanjut.

LATIHAN

Klasifikasikan persamaan diferensial berikut:

1. $\frac{dy}{dx} + x^2 y = xe^x$
2. $\frac{d^3 y}{dx^3} + 4\frac{d^2 y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y = \sin x$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
4. $x^2 dy + y^2 dx = 0$
5. $\frac{d^4 y}{dx^4} + 3\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^5 + 5y = 0$
6. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$

7. $\frac{d^2y}{dx^2}+y\sin x=0$

8. $\frac{d^2y}{dx^2}+x\sin y=0$

9. $\frac{d^6x}{dt^6}+\left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)+x=t$

10. $\left(\frac{dr}{ds}\right)^3=\sqrt{\frac{d^2r}{ds^2}+1}$

C. Penyelesaian Persamaan Diferensial

1. Penyelesaian eksplisit dan penyelesaian implisit

Diberikan suatu persamaan diferensial

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right]=0. \qquad \text{(C.1)}$$

Suatu fungsi real *f* yang terdefinisi untuk semua $x\in I$ dan memiliki turunan sampai ke-n untuk semua $x\in I$ disebut penyelesaian (C.1) jika dipenuhi:

$$F\left[x, f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)\right]=0.$$

Contoh soal 1:

Apakah fungsi eksplisit *f*(*x*) = x^2 merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial $xy'=2y, \forall x$?

Jawab:

$$y=f(x)=x^2 \Rightarrow y'=f'(x)=2x$$

Sehingga:

$$xy'=x(2x)=2x^2 \text{ dan } 2y=2x^2.$$

Dengan demikian, $xy'=2y=2x^2$

Jadi, fungsi f(x)= x^2 adalah penyelesaian persamaan diferensial $xy'=2y, \forall x$.

Contoh soal 2:

Apakah suatu fungsi implisit (yaitu fungsi dimana hubungan dari *x* ke *y* tidak tampak dengan jelas) yang didefinisikan sebagai $x^2 + y^2 - 1 = 0$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial $yy' = -x$ pada $[-1,1]$?

Jawab:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} - 0 = 0$$

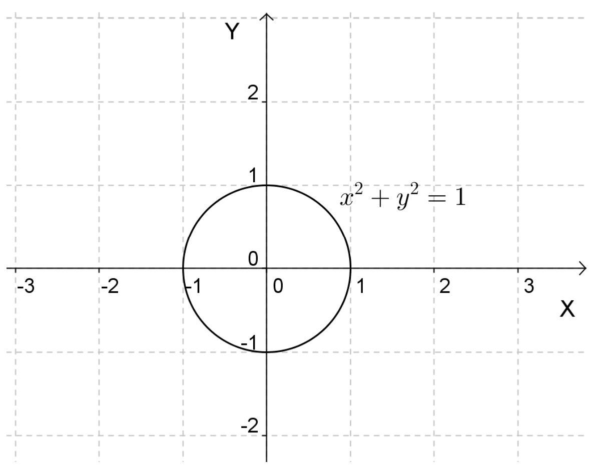
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$yy' = -x, \qquad \text{(karena } \frac{dy}{dx} = y'\text{)}$$

Jadi, fungsi implisit $x^2 + y^2 - 1 = 0$ adalah penyelesaian persamaan diferensial $yy' = -x$ pada $[-1,1]$, karena kurva fungsi $x^2 + y^2 - 1 = 0$ atau $x^2 + y^2 = 1$ adalah kurva lingkaran yang berada pada $[-1,1]$.



Keterangan:

Penyelesaian suatu persamaan diferensial berbentuk y=f(x) disebut fungsi eksplisit, sedangkan fungsi implisit, misalnya *g*(*x*,*y*)=0.

Contoh soal 3:

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial $y' = \sin x$.

Penyelesaian:

$$y' = \sin x$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Sehingga $\frac{dy}{dx} = \sin x \Leftrightarrow dy = \sin x dx$

$$\int dy = \int \sin x dx$$

Maka $y = -\cos x + c$, *c* = konstanta.

Keterangan:

i. Jika c: konstanta sebarang, maka penyelesaian persamaan diferensialnya disebut penyelesaian umum.

ii. Jika konstanta c memiliki nilai tertentu, maka penyelesaian persamaan diferensialnya disebut penyelesaian khusus.

Contoh soal 4:

Apakah fungsi $y = ce^x$, c = konstanta merupakan penyelesaian persamaan diferensial $y' - y = 0$?

Penyelesaian:

$$y = ce^x \Rightarrow y' = ce^x$$

sehingga $y' - y = ce^x - ce^x = 0$.

Jadi, fungsi $y = ce^x$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial $y' - y = 0$ (dalam pengertian penyelesaian umum, karena konstanta c sebarang).

2. Penyelesaian Umum dan Penyelesaian Khusus

Perhatikan contoh soal 4 sebelumnya. Dikemukakan bahwa persamaan diferensial $y' - y = 0$ memiliki penyelesaian umum $y = ce^x$, *c* = konstanta sebarang. Jika peubah *x* diberi nilai tertentu dan nilai fungsi penyelesaiannya ditetapkan, maka didapatkan nilai konstanta *c*. Selanjutnya, nilai konstanta *c* tersebut disubstitusikan pada penyelesaian umum, maka diperoleh penyelesaian khusus.

Contoh 1:

Persamaan diferensial $y' - y = 0$ memiliki penyelesaian umum: $y = ce^x$. Misal diberikan nilai $x = 0$ dan y(0) = 1, maka $y(0) = ce^0 \Leftrightarrow 1 = c.1 \Leftrightarrow c = 1$

Sehingga diperoleh penyelesaian khusus : $y = e^x$.

Contoh 2:

Pada persamaan diferensial $y' - \sin x = 0$ diperoleh penyelesaian umum : $y = -\cos x + c$. Andaikan variabel x diberi nilai $x = \pi$ dan $y(\pi) = 3$, maka

$y(\pi) = -\cos \pi + c \Leftrightarrow 3 = 1 + c \Leftrightarrow c = 2$

Jadi, penyelesaian khusus persamaan diferensial $y' - \sin x = 0$ adalah

$y = -\cos x + 2$.

D. Aplikasi Persamaan Diferensial dalam Bentuk Pemodelan Matematis.

Pengetahuan persamaan diferensial memiliki kontribusi yang besar pada bidang kajian dan pengembangan sains dan teknologi dalam bentuk pemodelan matematis terapan persamaan diferensial untuk memudahkan penyelesaiannya.

Contoh soal 1:

Buatlah pemodelan matematis dengan persamaan diferensial dari hukum-hukum benda jatuh di ruang hampa dengan gravitasi $g = 9{,}8 m / \det^2$.

Penyelesaian:

Model matematis dengan persamaan diferensial untuk Gravitasi (percepatan) benda jatuh sebagai berikut:

$$g = \frac{d^2h}{dt^2} = 9{,}8; \qquad h\text{: tinggi}$$

sehingga diperoleh PD: $\frac{d^2h}{dt^2} - 9{,}8 = 0$.

Persamaan untuk kecepatan benda jatuh:

$$v(t) = \frac{dh}{dt} = 9{,}8t + v_0 = gt + v_0.$$

sehingga diperoleh PD: $\frac{dh}{dt} = 9,8t + v_0 = gt + v_0$

Apabila dicari persamaan tinggi benda jatuh, diperoleh:

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$$

untuk $v_0 = 0$ dan $h_0 = 0, h(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

Contoh soal 2:

Tuliskan formulasi hukum pendinginan newton dalam bentuk persamaan diferensial dimana *T*(*t*) adalah suhu benda yang ditempatkan di dalam medium yang suhunya dijaga tetap T_1.

Penyelesaian:

Formulasi yang diminta adalah $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1)$, *k* : konstanta kesebandingan.

Contoh soal 3:

Sebuah tangki penampung cairan berisi 20 galon air asin. Larutan air garam mengandung 75 pon garam larut. Kemudian larutan air garam yang berisi 1,2 pon garam per gallon dimasukkan ke dalam tangki dengan laju 2 galon per menit dan air asin di dalam tangki dialirkan keluar dengan laju yang sama. Jika larutan air asin di dalam tangki dipertahankan agar homogen dengan tetap mengaduknya, tentukan formulasi (pemodelan matematis) persamaan diferensial yang digunakan untuk penyelesaian perhitungan banyaknya garam di dalam tangki.

Penyelesaian:

Andaikan y adalah banyaknya garam (dengan satuan pon) di dalam tangki pada t menit. Dari air asin yang dialirkan masuk, tangki mendapat tambahan 1,2 pon garam per galon, sehingga menjadi 2,4 pon per menit. Bersamaan air garam yang dimasukkan, dialirkan keluar dari tangki $\frac{1}{60}y$, sehingga formulasi perhitungan banyaknya garam di dalam tangki adalah

$$\frac{dy}{dt} = 2,4 - \frac{1}{60}y \text{ atau } \frac{1}{60}y + \frac{dy}{dt} = 2,4.$$

Jadi, formulasi yang dimaksud adalah $y' + \frac{1}{60}y - 2,4 = 0$.

LATIHAN :

1. Tunjukkan bahwa setiap fungsi di kolom I merupakan solusi dari persamaan diferensial di kolom II pada interval $a < x < b$.

I	II
a. $f(x) = x + 3e^{-x}$	$\frac{dy}{dx} + y = x + 1$
b. $f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$	$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$
c. $f(x) = e^x + 2x^2 + 6x + 7$	$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$
d. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

2. a. Tunjukkan $x^3 + 3xy^2 = 1$ solusi implisit persamaan diferensial $2xy\frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0$ pada interval $0 < x < 1$.

   b. Tunjukkan $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$ solusi implisit persamaan diferensial $x\frac{dy}{dx} + y = x^3y^3$ pada interval $0 < x < \frac{5}{2}$.

3. a. Tunjukkan setiap fungsi f yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \left(x^3 + c\right)e^{-3x}$$

   dengan c sebarang kostanta, merupakan solusi persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2e^{-3x}$$

   b. Tunjukkan setiap fungsi f yang didefinisikan oleh

$$f(x) = 2 + ce^{-2x^2}$$

   dengan c sebarang kostanta, merupakan solusi persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x$$

BAB II

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDER PERTAMA

A. Persamaan Diferensial Terpisahkan (PD separabel)

1. Persamaan Diferensial Terpisahkan

Terdapat persamaan diferensial order pertama yang dapat direduksi menjadi:

$g(y)y' = f(x)$, dimana $y' = \frac{dy}{dx}$

sehingga, $g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$.

Persamaan $g(y)dy = f(x)dx$ merupakan persamaan diferensial terpisahkan.

Bentuk $g(y)dy = f(x)dx$ adalah cara lain untuk menuliskan persamaan diferensial $g(y)y' = f(x)$. Persamaan $g(y)dy = f(x)dx$ disebut persamaan diferensial dengan peubah-peubah terpisahkan atau persamaan diferensial terpisahkan.

Persamaan diferensial di atas, kemudian dikenakan operasi integral dan didapat

$\int g(y)dy = \int f(x)dx$.

Jika fungsi-fungsi *f* dan *g* kontinu, maka nilai integralnya ada dan hasil integralnya merupakan penyelesaian persamaan diferensial tersebut.

Contoh soal 1:

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial $16yy' + 9x = 0$.

Penyelesaian:

$$16yy' + 9x = 0$$

$$16yy' = -9x$$

$$16y\frac{dy}{dx} = -9x$$

$$16ydy = -9xdx$$

$$\int 16ydy = \int -9xdx$$

$$8y^2 = -\frac{9}{2}x^2 + c$$

$$8y^2 + \frac{9}{2}x^2 = c\ .$$

Jadi, penyelesaian persamaan diferensial di atas adalah $8y^2 + \frac{9}{2}x^2 = c$.

Contoh soal 2:

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial $y' - y\sin x = 0$.

Penyelesaian :

$$y' - y\sin x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y\sin x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \sin x dx$$

$$\ln|y| = -\cos x + c$$

$$|y| = e^{-\cos x + c}\ .$$

Latihan:

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut.

1. $2xy' + x^2 = 0$
2. $y' - xy^{-2} = 0$
3. $3xy' - y = 0$
4. $yy' = 3\cos 2x$
5. $y'\tan x - \pi = 0$
6. $y'e^x + 2xy = 0$
7. $5xy + y'x = 0$
8. $\frac{y'}{2x} = \frac{1}{x^2 + 1}$

2. Persamaan Diferensial Terpisahkan dengan Nilai Awal

Pada bidang terapan masalah nilai awal memegang peranan penting untuk menentukan penyelesaian khusus dari sebuah persamaan diferensial. Andaikan penyelesaian khusus $g(x)$ memenuhi kondisi awal pada suatu titik tertentu x_0 dan penyelesaian $y(x)$ mempunyai nilai tertentu y_0, ditulis $y(x_0)=y_0$.

Misal:

$y(1) = 0$ berarti $y = 0$ jika $x = 1$

$y(0) = 2$ berarti $y = 2$ jika $x = 0$

$y(\pi) = 10$ berarti $y = 10$ jika $x = \pi$

Kondisi awal dari penyelesaian suatu persamaan diferensial disebut nilai awal dan untuk penyelesaiannya harus ditentukan penyelesaian khusus yang memenuhi syarat awal yang diberikan.

Pemahaman masalah nilai awal berasal dari suatu realita pada terapan bahwa peubah bebas seringkali berupa faktor waktu, sehingga persamaannya berbentuk $y(x_0) = y_0$ yang merupakan situasi awal pada suatu peubah. Misal pada waktu tertentu didapat penyelesaian dari suatu persamaan diferensial, maka penyelesaian itu menunjukkan kondisi yang terjadi pada waktu kemudian misalnya dalam bentuk $y(x) = ax + b$.

Contoh soal 1:

Tentukan penyelesaian masalah nilai awal dari suatu persamaan diferensial: $xy' + y = 0,\ \ y(1) = 1$.

Penyelesaian:

$$xy' + y = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + c$$

$$|y| = e^{-\ln|x|+c}.$$

Nilai awal : $y(1) = 1$

sehingga: $1 = e^{c} \Rightarrow c = 0$.

Jadi, penyelesaiannya adalah $|y| = e^{-\ln|x|+c}$.

Contoh soal 2:

Tentukan penyelesaian masalah nilai awal pada persamaan diferensial:

$(x^2+1)y' + y^2 + 1 = 0 \quad , y(0) = 1$.

Penyelesaian:

$$(x^2+1)y' + y^2 + 1 = 0$$

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} = -(y^2+1)$$

$$\frac{dy}{(y^2+1)} = -\frac{dx}{(x^2+1)}$$

$$\int \frac{dy}{(y^2+1)} = -\int \frac{dx}{(x^2+1)}$$

$$\arctan y = -\arctan x + c$$

$$\arctan y + \arctan x = c \ .$$

Misal: $\arctan x = a$ dan $\arctan y = b$ sehingga menurut teori dalam persamaan trigonometri yakni

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

Sehingga:

$$\tan c = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Jadi, $\frac{x+y}{1-xy} = \tan c$ merupakan penyelesaian umum persamaan diferensial di atas.

Diberikan nilai awal $y(0) = 1$, artinya $y = 1$ jika $x = 0$, sehingga

$$\frac{0+1}{1-0.1} = \tan c \Rightarrow \tan c = 1.$$

Jadi, penyelesaian PD di atas adalah

$$\frac{x+y}{1-xy}=1 \qquad \text{atau } y=\frac{1-x}{1+x}.$$

Soal- soal Latihan

Tentukan penyelesaian masalah nilai awal dari persamaan diferensial berikut.

1. $xy'+y=1 \quad , y(e)=1$
2. $y'-\frac{x}{y}=0 \quad , y(2)=0$
3. $yy'-2\sin^2 x=0 \quad , y(0)=\sqrt{3}$
4. $y^3y'=x^3 \quad , y(1)=0$
5. $y'+x^2y=0 \quad , y(1)=1$.

B. Persamaan Diferensial Homogen (PD dengan Transformasi)

Diberikan suatu persamaan diferensial $y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$, dimana g adalah fungsi dari $\frac{y}{x}$.

Misal:

1. $g\left(\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{y}{x}\right)^2$
2. $h\left(\frac{y}{x}\right)=\cos\frac{y}{x}$
3. $i\left(\frac{y}{x}\right)=1+\frac{y}{x}$, dan lain-lain.

Andaikan $\frac{y}{x}=u$, dimana y: fungsi dari x, dan u: fungsi dari x

Sehingga : y = ux

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(ux)=u+u'x$$

berarti :

$$\frac{dy}{dx}=y'=u+u'x.$$

Jika $y'=u+u'x$ dikembalikan pada persamaan diferensial $y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$, maka diperoleh:

$$u+u'x=g\left(\frac{y}{x}\right), \qquad g\left(\frac{y}{x}\right)=g(u)$$

$$u+u'x=g(u)$$

$$u'x=g(u)-u$$

$$x\frac{du}{dx}=g(u)-u$$

$$\frac{du}{g(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Bentuk $\dfrac{du}{g(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$ adalah persamaan diferensial terpisahkan.

Penyelesaiannya:

$$\int\frac{du}{g(u)-u}=\int\frac{dx}{x}.$$

Jika fungsi g(u) diketahui, maka penyelesaiannya dapat ditentukan.

Contoh soal 1:

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial $2xyy'-y^2+x^2=0$ dengan transformasi $u=\dfrac{y}{x}$.

Penyelesaian:

$$2xyy'-y^2+x^2=0 \qquad \text{dikalikan } \frac{1}{x^2}$$

$$2\frac{y}{x}y'-\frac{y^2}{x^2}+1=0$$

$$2\frac{y}{x}y'-\left(\frac{y}{x}\right)^2+1=0 \qquad ;\ \frac{y}{x}=u$$

$$2uy'-u^2+1=0 \qquad ;\ y'=u+u'x$$

$$2u^2+2uu'x-u^2+1=0$$

$$2uu'x+u^2+1=0$$

$$2uu'x=-\left(u^2+1\right)$$

$$\frac{2u}{u^2+1}\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x}$$

$$\frac{2u}{u^2+1}du=-\frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{2u}{u^2+1}du=-\int\frac{1}{x}dx$$

$$\ln|u^2+1|=-\ln|x|+c$$

$$|u^2+1|=e^{-\ln|x|+c} \qquad , \; u=\frac{y}{x}$$

$$\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right|=e^{-\ln|x|+c}$$

Karena $e^{-\ln|x|+c}$ bernilai positif sehingga diperoleh

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2+1=e^{-\ln|x|+c}$$

$$\frac{y^2}{x^2}+1=\frac{C}{|x|}. \qquad \text{C : konstanta.}$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $\frac{y^2}{x^2}+1=\frac{C}{|x|}$ atau $y=\pm x\sqrt{\frac{C}{|x|}-1}$.

Contoh soal 2

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial $y'=\cot(x+y)-1$ dengan transformasi $x+y=v$.

Penyelesaian:

$$y'=\cot(x+y)-1.$$

Transformasi:

$$x+y=v$$

$$y=v-x$$

$$y'=v'-1.$$

Sehingga:

$$v'-1=\cot v-1$$

$$v'=\cot v$$

$$\frac{dv}{dx} = \cot v$$

$$\frac{1}{\cot v} dv = dx$$

$$\tan v dv = dx$$

$$\int \tan v dv = \int dx$$

$$-\ln|\cos v| = x + c$$

$$\ln|\cos v| = -(x+c) \qquad ; v = x + y$$

$$\ln|\cos(x+y)| = -(x+c)$$

$$\cos(x+y) = e^{-(x+c)}$$

$$x + y = \arccos e^{-(x+c)}$$

$$y = -x + \arccos e^{-(x+c)}.$$

Jadi, penyelesaiannya: $y = -x + \arccos e^{-(x+c)}$.

Latihan

Dengan transformasi yang diberikan, tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut.

1. $xy' = e^{xy} - y \quad ; xy = u$
2. $y' = (y-x)^2 \quad ; y - x = u$
3. $e^y y' = k(x + e^y) - 1 \quad ; x + e^y = u$, k : konstanta
4. $y' = \dfrac{y - x + 1}{y - x + 5} \quad ; y - x = u$
5. $y' = \dfrac{1 - 2y - 4x}{1 + y + 2x} \quad ; y + 2x = u$.

C. Persamaan Diferensial Exact

Persamaan diferensial order pertama berbentuk :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

disebut persamaan diferensial exact jika ruas kiri merupakan diferensial total, yaitu

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \tag{2}$$

dari suatu fungsi dua peubah f(x,y). Sehingga, persamaan (1) dapat ditulis:

$$du = 0 \tag{3}$$

Jika diintegralkan, maka diperoleh:

$u(x, y) = c$,   c : konstanta.

Dengan membandingkan persamaan (1) dan (2), terlihat bahwa persamaan (1) bersifat pasti (exact) jika ada suatu fungsi f(x,y) yang bersifat

$$\left.\begin{aligned} a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M \\ b) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Jika fungsi-fungsi M dan N terdefinisikan dan terdiferensiabel di semua titik pada bidang xy dalam kurva tertutup dan tidak memotong kurva fungsi itu sendiri, maka dari persamaan (4) diperoleh:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \text{ dan } \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \tag{5}$$

Tampak bahwa dua turunan kedua di atas adalah sama, yaitu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{ atau } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

sehingga:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

merupakan syarat perlu dan syarat cukup agar $Mdx + Ndy = 0$ merupakan persamaan diferensial exact.

1. Menentukan penyelesaian persamaan diferensial eksak

Fungsi $u(x, y)$ sebagai fungsi penyelesaian persamaan diferensial eksak diperoleh melalui operasi pengintegralan sebagai berikut.

a. Integralkan terhadap variabel *x,* sehingga diperoleh:

$$u = \int M dx + k(y)$$

k(y) : konstanta pengintegralan dan nilainya dapat ditentukan dengan $\frac{du}{dy} = N$.

b. Integralkan terhadap variabel y, sehingga diperoleh:

$$u = \int N dy + l(x)$$

l(*x*): konstanta pengintegralan dan nilainya dapat ditentukan dengan $\frac{du}{dx} = M$.

Contoh soal 1:

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial $xy' + y + 4 = 0$.

Penyelesaian:

$$xy' + y + 4 = 0$$

$$xy' = -(y+4)$$

$$x\frac{dy}{dx} = -(y+4)$$

$$xdy + (y+4)dx = 0$$

$$(y+4)dx + xdy = 0$$

$$M(x,y) = y + 4 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

$$N(x,y) = x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 1 .$$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, maka $xy' + y + 4 = 0$ persamaan diferensial eksak.

Fungsi penyelesaian:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int N dy + l(x) \\ &= \int x dy + l(x) \\ &= xy + l(x) \end{aligned}$$

Nilai konstanta $l(x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \Rightarrow y + \frac{dl}{dx} = y + 4$$

$$\frac{dl}{dx} = 4$$

$$dl = 4dx$$

$$\int dl = \int 4dx$$

$$l(x) = 4x + c\,,$$

sehingga

$$u(x, y) = xy + 4x + c$$

$$xy + 4x + c = 0$$

$$xy = -c - 4x$$

$$y = -\frac{c}{x} - 4\,.$$

Jadi, penyelesaiannya adalah fungsi $y = -\frac{c}{x} - 4$.

Contoh soal 2:

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial $y^2dx + 2xydy = 0$.

Penyelesaian:

$$y^2dx + 2xydy = 0$$

$$M(x, y) = y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$

$$N(x, y) = 2xy \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2y\,.$$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, maka $y^2dx + 2xydy = 0$ persamaan diferensial eksak.

$$u(x, y) = \int Mdx + k(y)$$

$$= \int y^2dx + k(y)$$

$$= xy^2 + k(y)\,.$$

Selanjutnya dicari nilai $k(y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N \Rightarrow 2xy + \frac{dk}{dy} = 2xy$$

$$\frac{dk}{dy} = 0 \Rightarrow k(y) = c\,,$$

sehingga :

$$u(x, y) = xy^2 + c \text{ atau } xy^2 + c = 0\,.$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $xy^2 + c = 0$.

LATIHAN

Perlihatkan bahwa persamaan diferensial berikut adalah eksak dan tentukan penyelesaiannya.

1. $xdx + 2ydy = 0$
2. $[(x+1)e^x - e^y]dx - xe^y dy = 0$
3. $e^{-\theta}dr - re^{-\theta}d\theta = 0$
4. $(xdy - ydx)\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0$
5. $\cos xdx - ydy = 0$

2. Faktor Pengintegralan

Persamaan diferensial $\frac{1}{y}dx + 2xdy = 0$ bukan merupakan persamaan diferensial eksak, karena

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Namun dapat dibentuk menjadi persamaan diferensial eksak, jika dikalikan dengan $f(x,y) = \frac{y}{x}$, sehingga diperoleh

$$\left(\frac{1}{y}dx + 2xdy\right)\frac{y}{x} = 0,$$

$\frac{1}{x}dx + 2ydy = 0$, karena $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 0$.

Dari ilustrasi di atas, tampak bahwa suatu persamaan $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ belum tentu bersifat eksak. Selanjutnya, untuk membentuk menjadi persamaan diferensial eksak, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dikalikan dengan sebuah fungsi $f(x,y) \neq 0$. Fungsi pengali $f(x,y) \neq 0$ disebut factor pengintegralan (*integrating factor*).

Penyelesaian persamaan diferensial $\frac{1}{y}dx + 2xdy = 0$ yang tidak eksak dan penyelesaian persamaan diferensial $\frac{1}{x}dx + 2ydy = 0$ yang eksak hasilnya harus sama.

Perhatikan uraian berikut.

Penyelesaian cara 1:

$\frac{1}{y}dx + 2xdy = 0$: persamaan diferensial tidak eksak,

$$\frac{1}{y}dx = -2xdy$$

$$ydy = -\frac{1}{2x}dx$$

$$\int ydy = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}\ln|x| + \bar{c}$$

$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\ln|x| = \bar{c}$; dikalikan 2

$y^2 + \ln|x| = 2\bar{c}$; $2\bar{c} = c$

$y^2 + \ln|x| = c$: penyelesaian

Penyelesaian cara 2:

$\frac{1}{x}dx + 2ydy = 0$: persamaan diferensial eksak ; $M(x,y) = \frac{1}{x}$, $N(x,y) = 2y$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int Ndy + l(x) \\ &= \int 2ydy + l(x) \\ &= y^2 + l(x) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \Rightarrow 0 + \frac{dl}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$dl = \frac{1}{x}dx$$

$$\int dl = \int \frac{1}{x} dx$$

$$l(x) = \ln|x| + \bar{c}$$

Sehingga:

$$u(x,y) = y^2 + \ln|x| + \bar{c}$$

$$y^2 + \ln|x| + \bar{c} = 0$$

$$y^2 + \ln|x| = -\bar{c}, \qquad -\bar{c} = c$$

$$y^2 + \ln|x| = c \qquad \text{: penyelesaian.}$$

Jadi, penyelesaian cara 1 = penyelesaian cara 2.

Contoh soal 1:

Dengan menggunakan faktor pengintegralan, selesaikanlah persamaan diferensial :

$$-x^{-2}y^2dx - x^{-1}ydy = 0\,.$$

Penyelesaian:

$$-x^{-2}y^2dx - x^{-1}ydy = 0$$

Berarti:

$$M(x,y) = -x^{-2}y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -2x^{-2}y$$

$$N(x,y) = -x^{-1}y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = x^{-2}y$$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, maka persamaan diferensial $-x^{-2}y^2dx - x^{-1}ydy = 0$ tidak eksak.

Faktor pengintegralan yang digunakan yaitu $f(x,y) = x^2y^{-1}$, sehingga:

$$-x^{-2}y^2dx - x^{-1}ydy = 0 \qquad \text{dikalikan } \frac{x^2}{y}$$

$$-ydx - xdy = 0\,.$$

Tampak bahwa $-ydx - xdy = 0$ adalah persamaan diferensial eksak karena $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -1$.

Fungsi penyelesaian:

$$u(x,y) = \int Ndy + l(x)$$

$$= \int -xdy + l(x)$$
$$= -xy + l(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \Rightarrow -y + \frac{dl}{dx} = -y$$
$$dl = 0dx$$
$$\int dl = \int 0dx$$
$$l(x) = c.$$

Jadi, penyelesaian persamaan diferensial $-x^{-2}y^2dx - x^{-1}ydy = 0$ adalah fungsi $-xy + c = 0$.

LATIHAN:

Tentukan faktor pengintegralan dan penyelesaian persamaan diferensial berikut.

1. $(y+1)dx - (x+1)dy = 0$
2. $3ydx + 2xdy = 0$
3. $x^2ydx + xy^3dy = 0$
4. $\sin ydx + \cos ydy = 0$
5. $\cos x \cos ydx - \sin x \sin ydy = 0$.

Ket: Cara mendapatkan faktor pengintegralan

BAB III

PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDER PERTAMA DAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BERNOULLI

A. Persamaan Diferensial Linear Order Pertama

Bentuk umum :

$$y' + p(x)y = q(x)$$

disebut persamaan diferensial linear order pertama, *y* dan *y*' bersifat linear sedangkan $p(x)$ dan $q(x)$ sebarang fungsi dalam *x* . Jika $q(x) = 0$, maka

$$y' + p(x)y = 0$$

disebut persamaan diferensial linear homogen.

Jika $q(x) \neq 0$, maka

$$y' + p(x)y = q(x)$$

disebut persamaan diferensial linear tak homogen.

1. Menentukan penyelesaian persamaan diferensial linear homogen dan persamaan diferensial tak homogen.

a. Penyelesaian persamaan diferensial linear homogen

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow dy = -p(x)ydx$$

$$\frac{1}{y}dy = -p(x)ydx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \bar{c}$$

$$y(x) = ce^{-\int p(x)dx}$$

dimana: $c = e^{\bar{c}}$ jika $y > 0$

$c = -e^{\bar{c}}$ jika $y < 0$

$c = 0$ yang menghasilkan penyelesaian trivial $y = 0$.

Jadi, penyelesaian persamaan diferensial linear homogen order pertama : $y' + p(x)y = 0$

Adalah fungsi $y(x) = ce^{-\int p(x)dx}$.

b. Penyelesaian persamaan diferensial linear tak homogen

$y' + p(x)y = q(x)$, dimana $q(x) \neq 0$

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$, dikalikan *dx*

$dy + p(x)ydx = q(x)dx$

$dy + p(x)ydx - q(x)dx = 0$

$dy + (py - q)dx = 0$

$(py - q)dx + dy = 0$.

Andaikan $py - q = P$ dan $1 = Q$, maka $(py - q)dx + dy = 0$ dapat dibentuk menjadi

$$Pdx + Qdy = 0.$$

Jika $P \neq 0$, suatu faktor pengintegralan

$$P(x) = \frac{1}{f}$$

$$P(x)dx = \frac{1}{f}df$$

$$\int P(x)dx = \int \frac{1}{f}df$$

$$\ln|f| = \int P(x)dx$$

$$f(x) = e^{\int P(x)dx}, \quad \int P(x)dx = h(x) \Rightarrow P(x) = h'(x).$$

Sehingga:

$$f(x) = e^{h(x)}.$$

Dengan demikian, persamaan diferensial $y'+p(x)y=q(x)$ dikalikan dengan $f(x)=e^{h(x)}$ diperoleh bentuk

$$\left(y'+p(x)y\right)e^{h(x)}=q(x)e^{h(x)},$$

disederhanakan menjadi

$$e^{h}\left(y'+py\right)=qe^{h}, \text{ dimana } p=h',$$

sehingga :

$$e^{h}\left(y'+h'y\right)=qe^{h}.$$

Selanjutnya:

$$(e^{h}y)'=e^{h}y'+e^{h}h'y,$$

maka diperoleh:

$$(e^{h}y)'=qe^{h}$$

$$\int(e^{h}y)'dx=\int qe^{h}dx$$

$$e^{h}y=\int qe^{h}dx+c$$

Jadi,

$$y=e^{-h}\left[\int qe^{h}dx+c\right],$$

dimana $h=\int p(x)dx$.

Dengan demikian, penyelesaian persamaan diferensial linear tak homogen

$$y'+p(x)y=q(x)$$

adalah fungsi

$$y=e^{-h}\left[\int qe^{h}dx+c\right].$$

Contoh soal 1:

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial linear homogen $y'+y=0$.

Penyelesaian:

$$y'+y=0$$

$$\int P(x)dx=\int dx=x+\bar{c} \quad ,$$

konstanta $\bar{c}$ diperhitungkan sama dengan nol.

Rumus penyelesaian:

$$y(x) = ce^{-\int P(x)dx}$$

$$= ce^{-x}.$$

Jadi, penyelesaian persamaan diferensial linear homogen $y' + y = 0$ adalah fungsi $y(x) = ce^{-x}$.

Cek ulang:

$$y(x) = ce^{-x} \Rightarrow y'(x) = -ce^{-x},$$

sehingga

$$y' + y = -ce^{-x} + ce^{-x} = 0 \quad \text{(benar)}.$$

Contoh soal 2:

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial tak homogen $y' + \frac{1}{x} y = -\frac{4}{x}$. Tentukan pula penyelesaian khususnya, jika diberikan nilai awal $y(1) = 0$.

Penyelesaian:

$$y' + \frac{1}{x} y = -\frac{4}{x} \qquad ; \; p(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = -\frac{4}{x}$$

$$h(x) = \int p(x)dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$e^h = e^{\ln|x|} = x \Rightarrow e^{-h} = \frac{1}{x},$$

sehingga

$$y = e^{-h}\left[\int e^h q(x)dx + c\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[\int x\left(-\frac{4}{x}\right)dx + c\right]$$

$$= -4 + \frac{c}{x}.$$

Jadi, penyelesaian persamaan diferensial linear tak homogen $y' + \frac{1}{x} y = -\frac{4}{x}$ adalah fungsi

$$y = -4 + \frac{c}{x}.$$

Penyelesaian khusus jika diberikan nilai awal $y(1) = 0$,

$$0 = -4 + \frac{c}{1} \Rightarrow c = 4.$$

Jadi, penyelesaian khususnya:

$$y = -4 + \frac{4}{x}.$$

LATIHAN:

Tentukan penyelesaian umum bagi persamaan diferensial berikut.

1. $y' - y = 3$
2. $y' - y\cot x = 0$
3. $y' + ay = e^{-ax}$ $\qquad$ *a* : konstanta
4. $xy' + 2y = 2e^{x^2}$
5. $xy' + y = 2x$

Tentukan penyelesaian khusus bagi persamaan diferensial berikut dengan nilai awal yang diberikan.

1. $y' - 2y = e^{x}$ $\qquad$, $y(1) = 0$
2. $y' + 2y = (x+2)^2$ $\qquad$, $y(0) = 0$
3. $y' - x^3 y = -2x^3$ $\qquad$, $y(0) = 1$
4. $y' + y\tan x = 2x\cos x$ $\qquad$, $y(0) = -1$
5. $xy' = (1+x)y$ $\qquad$, $y(2) = 6e^2$

2. Terapan Persamaan Diferensial Order Pertama

Bidang-bidang terapan persamaan diferensial adalah kajian-kajian sains (fisika, kimia, biologi) dan teknologi: otomotif, listrik, sipil, dan sebagainya.

(Laju pertumbuhan, peluruhan, tingkat suku bunga)

Contoh soal 1:

Terapan pada bidang fisika

Hukum pendinginan Newton diformulasikan sebagai :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1), \qquad k : \text{konstanta}$$

$T(t)$ adalah suatu benda yang ditempatkan dalam medium yang sukunya tetap T_1.

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial di atas jika suku awal benda $T(0) = T_0$.

Penyelesaian:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1)$$

$$= -kT + kT_1)$$

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_1.$$

Faktor pengintegralan $f(t) = e^{\int k\,dt} = e^{kt}$,

Sehingga :

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_1 \qquad \text{(dikalikan } e^{kt}\text{),}$$

$$e^{kt}\frac{dT}{dt} + e^{kt}kT = e^{kt}kT_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(Te^{kt}\right) = kT_1e^{kt},$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(Te^{kt}\right)dt = \int kT_1e^{kt}dt,$$

$$Te^{kt} = \frac{1}{k}kT_1e^{kt} + c,$$

$$T = T_1 + \frac{c}{e^{kt}}.$$

Nilai awal = suhu benda : $T(0) = T_0$ sehingga

$$T_0 = T_1 + \frac{c}{e^0} \Leftrightarrow c = T_0 - T_1.$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $T = T_1 + \frac{T_0 - T_1}{e^{kt}}$.

Contoh soal 2:

Terapan pada bidang Kimia.

Bak penampung cairan mula-mula berisi 120 galon air garam dapur NaCl. Larutan tersebut mengandung 75 pon garam. Kemudian larutan air garam yang mengandung 1,2 pon garam per gallon dialirkan ke dalam tangki dengan laju 1 galon per menit dan dalam waktu yang bersamaan, air garam dalam bak dialirkan keluar dengan laju 1 galon per menit. Jika larutan iar garam di dalam bak dipertahankan supaya homogen dengan cara diaduk, tentukan kandungan garam di dalam tangki setelah 1 jam.

Penyelesaian:

Andaikan kandungan air garam di dalam bak pada waktu *t* adalah *y* pon, berarti tambahan aliran yang masuk 1,2 pon garam per menit dan yang keluar $\frac{1}{60}y$.

Sehingga dapat dibentuk pemodelan matematis dalam bentuk persamaan diferensial:

$$\frac{dy}{dt} = 1,2 - \frac{1}{60}y,$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{60}y = 1,2.$$

Digunakan factor pengintegralan $f(y,t) = e^{\frac{t}{60}}$.

Sehingga:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{60}y = 1,2 \qquad \text{(dikalikan } e^{\frac{t}{60}}\text{)},$$

$$e^{\frac{t}{60}}\frac{dy}{dt} + e^{\frac{t}{60}}\frac{1}{60}y = 1,2e^{\frac{t}{60}},$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{60}}\right) = 1,2e^{\frac{t}{60}},$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{60}}\right)dt = \int 1,2e^{\frac{t}{60}}dt,$$

$$ye^{\frac{t}{60}} = 1,2.60e^{\frac{t}{60}} + c,$$

$$y = \frac{72e^{\frac{t}{60}}}{e^{\frac{t}{60}}} + \frac{c}{e^{\frac{t}{60}}},$$

$$y = 72 + \frac{c}{e^{\frac{t}{60}}}.$$

Nilai awal : $y(0) = 75$ pon garam, berarti $y = 75$ jika $t = 0$ sehingga

$$75 = 72 + \frac{c}{1} \Rightarrow c = 3.$$

Jadi, kandungan garam did lam bak setelah satu jam = 60 menit adalah

$$y = 72 + \frac{3}{e}$$

$$= 73{,}104 \text{ pon.}$$

SOAL-SOAL LATIHAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

A. PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDER PERTAMA

Tentukan order dan jenis persamaan diferensial berikut apakah linear atau non linear.

1. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$
2. $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 1$
3. $(1 + y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = e^x$
4. $\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$
5. $\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} + (\cos^2 x)y = x^3$

Selidiki apakah fungsi yang diberikan merupakan penyelesaian persamaan diferensial berikut.

6. $y'' - y = 0 \qquad , y_1 = e^x \quad , y_2 = \cos x$
7. $y'' + 2y' - 3y = 0 \qquad , y_1 = e^{-3x} \quad , y_2 = e^x$
8. $xy' - y = x^2 \qquad , y = 3x + x^2$
9. $2x^2y'' + 3xy' + y = 0 \quad , x > 0 \; ; \; y_1 = x^{\frac{1}{2}} \quad , y_2 = x^{-1}$
10. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0 \quad , x > 0 \; ; \; y_1 = x^{-2} \quad , y_2 = x^{-2} \ln x$

Selesaikan Bentuk Persamaan Diferensial berikut.

1. $y' = -\frac{y-3}{2}$
2. $y' + 2xy = x$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1+2y^2}$

Carilah penyelesaian Umum Persamaan Diferensial berikut.

1. $y' = \frac{x^2}{y}$
2. $y' + y^2 \sin x = 0$
3. $y' = (cos^2 x)(cos^2 y)$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$
5. $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$

Carilah penyelesaian khusus dari persamaan diferensial berikut.

6. $y' = -\frac{y-3}{2}$, $y(0) = 2$
7. $y' + 2xy = x$, $y(0) = 0$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$, $y(0) = 1$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$, $y(0) = -1$
10. $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1+2y^2}$, $y(0) = 1$

Berikut ini diberikan Persamaan Diferensial berbentuk $y' + P(t)y = Q(t)$. Carilah penyelesaiannya.

1. $y' + \frac{1}{t}y = \sin t$
2. $t^2 y' + 3ty = \frac{\sin t}{t}$
3. $y' + 2y = 2e^t + t$
4. $2y' + y = t - 1$
5. $y' + (\tan t)\, y = t \sin 2t$

Selesaikan masalah nilai awal yang diberikan berikut ini.

6. $ty' + 2y = t^2 - t + 1$, $y(1) = \frac{1}{2}$
7. $ty' + y = e^t$, $y(1) = 1$
8. $y' + (\cot t)y = 2\, cosec\, t$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
9. $ty' + 2y = \sin t$, $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$
10. $t(2+t)y' + 2(1+t)y = 1 + 3t^2$, $y(-1) = 1$

SOAL APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDER SATU.

1. Sebuah isotop radioaktif Thorium -234 meluruh dengan laju proporsional terhadap jumlahnya. Jika 100 mg material berkurang menjadi 82.04 mg dalam waktu 1 minggu, tentukan
   a. bentuk modelnya.
   b. jumlahnya saat *t*
   c. interval waktu ketika radioaktif meluruh menjadi setengah jumlah semula.
2. Andaikan jumlah uang yang didepositikan di bank mendapat bunga tahunan dengan laju *r* . Nilai *S*(*t*) dari modal pada waktu *t* bergantung pada frekuensi bunga majemuk (tahunan, bulanan, mingguan, atau harian). Diasumsikan bunga majemuk berjalan secara kontinu.
   a. Tuliskan bentuk laju perubahan modal yang didepositokan.
   b. Carilah jumlah modal yang didepositokan pada saat *t*.
3. Pada waktu $t = 0$ sebuah bejana berisi Q_0 pon garam yang dilarutkan dalam 100 galon air. Diasumsikan air mengandung ¼ pon garam per galon yang sedang mengalir masuk bejana dengan laju *r* galon/menit kemudian dialirkan keluar bejana.
   a. Tentukan model laju perubahan aliran dalam bejana.
   b. Tentukan jumlah garam dalam bejana pada waktu *t.*

4. Diketahui laju pertumbuhan suatu kultur bakteri proporsional terhadap jumlahnya pada waktu t dan jumlahnya menjadi dua kali lipat dalam sehari. Berapa jumlah bakteri setelah 3 hari? Hitung juga setelah 1 minggu.
5. Sebuah thermometer menunjukkan suhu 5^0C, kemudian dibawa ke ruangan yang bersuhu 22^0C. Satu menit kemudian thermometer menunjukkan suhu 12^0C. Berapa lama dibutuhkan sehingga thermometer menunjukkan suhu 21.9^0C ($\approx 22^0$C)?
6. Andaikan populasi tertentu memiliki laju pertumbuhan terhadap waktu berbentuk:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(0.5+\sin t)y}{5} \, .$$

   Jika y(0)=1, tentukan waktu t dimana populasi menjadi dua kali lipat.
7. Andaikan suhu secangkir kopi menurut Hukum Newton tentang pendinginan (*Newton's law of cooling*) 95^0C saat dicampur dengan air mendidih. Satu menit kemudian suhu turun menjadi 85^0C pada ruangan bersuhu 25^0C. Tentukan kapan kopi tersebut mencapai suhu 65^0C.
8. Sebuah benda bermassa m diterjunkan dengan percepatan yang proporsional terhadap kecepatannya (v). Diasumsikan percepatan gravitasi konstan. Jika model pada permasalahan ini berbentuk:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

   carilah bentuk v(t) dari benda tersebut.

SOAL PERSAMAAN DIFERENSIAL TRANSFORMASI

Selesaikan persamaan diferensial berikut dengan transformasi , $\frac{y}{x} = u$.

1. $xy' = y^2 + y$
2. $xy' = x + y$
3. $y' = \frac{(x^2+y^2)}{xy}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+3y^2)}{2xy}$
5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y}{2x+y}$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x}{2x-y}$
7. $xy' = (y-x)^3 + y$, $y(1) = \frac{3}{2}$
8. $xy' = y + 3x^4 \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$, $y(1) = 0$
9. $xy' = y + x^2 \sec^2\left(\frac{y}{x}\right)$, $y(1) = \pi$
10. $xyy' = 2y^2 + 4x^2$, $y(2) = 4$
11. $y' = (y+4x)^2$,dengan transformasi $y + 4x = v$
12. $y' = \frac{1-2y+4x}{1+y+2x}$, dengan transformasi $y + 2x = v$
13. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4}$, dengan transformasi $x = X + 1$ dan $y = Y - 2$

SOAL PERSAMAAN DIFERENSIAL EKSAK

Tentukan apakah persamaan diferensial berikut eksak atau tidak. Jika persamaan diferensial yang diberikan eksak, maka carilah penyelesaiannya.

1. $(2x+3)+(2y-2)y'=0$
2. $(2x+4y)+(2x-2y)y'=0$
3. $(3x^2-2xy+2)dx+(6y^2-x^2+3)dy=0$
4. $(2xy^2+2y)dx+(2x^2y+2x)dy=0$
5. $\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+by}{bx+cy}$
6. $\frac{dy}{dx}=-\frac{ax-by}{bx-cy}$
7. $(e^x\sin y-2y\sin x)dx+(e^x\cos y+2\cos x)dy \; =0$
8. $(e^x\sin y+3y)dx-(3x-e^x\sin y)dy \; =0$
9. $\left(\frac{y}{x}+6x\right)dx+(\ln x \; -2)dy=0 \quad , x>0$
10. $(x\ln y+xy)dx+(y\ln x+xy)dy=0 \quad , x>0, \, y>0$

Tentukan nilai b agar persamaan diferensial yang diberikan eksak. Kemudian carilah solusinya untuk nilai b yang diperoleh.

11. $(xy^2+bx^2y)dx+(x+y)x^2dy=0$
12. $(ye^{2xy}+x)dx+bxe^{2xy}dy=0$

DAFTAR PUSTAKA

Boyce W.E and DiPrima, R.C., 1997, Elemntary Differential Equations and Boundary Value Problems. New York: John Wiley & Sons.Inc.

Kreyszig, E.2006. Advanced Engineering Mathematics, 9th ed. New York: John Wiley & Sons, Inc.Leithold,

Louis, 1993, Kalkulus dan Geometri Analitik, Jakarta : Erlangga.

Purcell, Erwin J., Dale Varberg, 2001, Kalkulus, Batam : Interaksara.

Ross, SL.1984. Differential Equations. New York: John Wiley & Sons.Inc.